

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
DỰ ÁN ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN THCS  
LOAN Số 1718 - VIE (SF)

NGUYỄN MẠNH QUÝ - NGUYỄN XUÂN LIÊM

GIÁO TRÌNH  
PHÉP TÍNH VI PHÂN  
VÀ TÍCH PHÂN  
CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ

*Phần Lí thuyết*



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM



NGUYỄN MẠNH QUÝ – NGUYỄN XUÂN LIÊM

**Giáo trình**  
**PHÉP TÍNH VI PHÂN**  
**VÀ TÍCH PHÂN**  
**CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ**

*Phần lí thuyết*

*(Tái bản lần thứ ba)*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

[www.lib.hau.edu.vn](http://www.lib.hau.edu.vn) - [www.lib.hau.edu.vn](http://www.lib.hau.edu.vn) - [www.lib.hau.edu.vn](http://www.lib.hau.edu.vn) - [www.lib.hau.edu.vn](http://www.lib.hau.edu.vn) - [www.lib.hau.edu.vn](http://www.lib.hau.edu.vn)

---

Mã số: 01.01.317/1181 - ĐH 2012

# MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
<b>LỜI NÓI ĐẦU</b>	7
<b>CHƯƠNG MỞ ĐẦU</b>	11
§1. Số thực	12
§2. Giá trị tuyệt đối	27
§3. Sai số	31
<b>CHƯƠNG I. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ</b>	43
§1. Định nghĩa giới hạn của một dãy số thực	44
§2. Một số tính chất đơn giản của giới hạn	53
§3. Các phép toán trên giới hạn	58
§4. Bổ đề Cauchy về dãy đoạn bao nhau và thắt	
Định lí Bolzano – Weierstrat	65
§5. Tiêu chuẩn Còsi	68
§6. Giới hạn vô cực	
Vô cùng lớn và vô cùng bé	70
§7. Một vài giới hạn quan trọng.	
Số e và logarit tự nhiên	78
<b>Chú thích: Tiểu sử của một số nhà toán học</b>	
<b>CHƯƠNG II. HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN HÀM SỐ</b>	85
§1. Bổ túc về hàm số	85
§2. Định nghĩa giới hạn của hàm số	
Tiêu chuẩn Còsi	106

§3. Một số tính chất và các phép toán	115
§4. Giới hạn một phía	125
§5. Giới hạn tại vô cực	131
§6. Giới hạn vô cực	136
§7. Vô cùng bé và vô cùng lớn.	
Các hàm số tương đương	143
<b>Chú thích: Tiểu sử của một số nhà toán học</b>	
<b>CHƯƠNG III. HÀM SỐ LIÊN TỤC</b>	157
§1. Định nghĩa hàm số liên tục.	
Các điểm gián đoạn	157
§2. Các phép toán trên hàm số liên tục.	
Hàm số hợp của hai hàm số liên tục	165
§3. Hàm số liên tục trên một đoạn	167
§4. Tính liên tục của hàm số ngược	173
§5. Tính liên tục của các hàm số sơ cấp	175
§6. Một vài giới hạn liên quan đến số e	177
<b>CHƯƠNG IV. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN</b>	179
§1. Định nghĩa đạo hàm.	
Một vài tính chất đơn giản	179
§2. Mở rộng khái niệm đạo hàm	187
§3. Các quy tắc tính đạo hàm	191
§4. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp	195
§5. Vi phân	209
§6. Đạo hàm cấp cao	215

§7. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng phương pháp Niuton	219
<b>Chú thích: Tiểu sử của một số nhà toán học</b>	223
<b>CHƯƠNG V. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ ĐẠO HÀM</b>	227
§1. Các định lý về giá trị trung bình	227
§2. Quy tắc Lôpitan	233
§3. Công thức Taylo	241
<b>Chú thích: Tiểu sử của một số nhà toán học</b>	252
<b>CHƯƠNG VI. KHẢO SÁT HÀM SỐ</b>	255
§1. Tính tăng và tính giảm của hàm số	255
§2. Cực trị của hàm số	258
§3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	266
§4. Tính lồi, lõm và điểm uốn của đường cong	272
§5. Tiệm cận	279
§6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số	288
<b>CHƯƠNG VII. TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH</b>	299
§1. Nguyên hàm và tích phân không xác định	300
§2. Các tính chất đơn giản	306
§3. Phương pháp đổi biến số dưới dấu tích phân	310
§4. Phương pháp tích phân từng phần	319
§5. Tích phân các hàm số hữu tỉ	326
§6. Tích phân các hàm số vô tỉ và siêu việt	333
§7. Khái niệm về phương trình vi phân	342

## CHƯƠNG VIII. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

§1. Bỏ túc: kí hiệu $\Sigma$	351
§2. Tích phân xác định	353
§3. Tính chất của tích phân xác định	373
§4. Các phương pháp tính tích phân	385
§5. Ứng dụng của tích phân	393
§6. Tính gần đúng tích phân	412
§7. Tích phân suy rộng	419

**Tài liệu tham khảo**



## LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích mới ra đời vào những năm 80 của thế kỷ XVII do yêu cầu của nhiều ngành khoa học (do đó có rất nhiều ứng dụng trong thực tế), và phải trải qua một thời gian dài, lí thuyết của nó mới dần dần được hoàn thiện. Hai nhà toán học Anh Isaac Niuton (Isaac Newton 1642 – 1727) và Đức Gônfrêr Uynhem Laibnít (Golfried Wilhelm Leibnitz 1646 – 1716) là những người đầu tiên xây dựng nên những cơ sở ban đầu của giải tích khi các ông nghiên cứu các bài toán hình học về tiếp tuyến của một đường cong, về diện tích của một hình phẳng, các bài toán cơ học về vận tốc tức thời và phương trình chuyển động của một động tử, các bài toán về cực trị... Tuy nhiên, chỉ đến những công trình của Oguyxtin Lu-i Côi (Augustin Louis Cauchy 1789 – 1857) được công bố vào những năm 1820, lí thuyết về giới hạn và giải tích mới được trình bày một cách đầy đủ, chặt chẽ và sáng sủa như ngày nay. Nhà toán học gốc Ý Giôdép Lu-i Lagrăng (Joseph Louis Lagrange 1736 – 1813) có công đưa ra được nhiều thuật ngữ và kí hiệu thuận lợi thường dùng cho đến bây giờ.

Giải tích là một môn học dài và khó; ở đây luôn luôn gặp những tình huống thay đổi, những giả thiết phức tạp, sự đan xen các cấu trúc toán học, sự chồng chất các khái niệm, sự suy luận chính xác và tỉ mỉ, do đó đòi hỏi người học phải thường xuyên theo dõi, thấu hiểu hệ thống của các vấn đề, các khái niệm, nắm chắc phương pháp suy luận chặt chẽ, tăng cường thực hành, vận dụng các kiến thức đã học.

Giáo trình giải tích viết theo chương trình CDSP đào tạo giáo viên THCS do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành năm 2003. Bộ giáo trình gồm ba cuốn:

***Phép tính vi phân và tích phân của hàm số một biến số;***

***Phép tính vi phân và tích phân của hàm số nhiều biến số;***

***Phương trình vi phân.***

Nội dung cơ bản của giải tích toán học là Lí thuyết giới hạn, Phép tính vi phân và tích phân. Những khái niệm cơ bản của giải tích đều được định nghĩa thông qua giới hạn: Phép tính vi phân và tích phân –

nội dung chủ yếu của giải tích – là hai dạng giới hạn đặc biệt thường gặp trong các bài toán thực tế. Ngoài ra sự liên tục của hàm số, sự hội tụ của dãy số, dãy hàm cũng đều được định nghĩa thông qua giới hạn. Vì thế có thể nói lí thuyết giới hạn là cốt lõi, là nền móng của giải tích.

Theo yêu cầu của chương trình, để tăng cường tính thực hành, phát huy tính tích cực học tập của sinh viên, các tác giả đã cố gắng thể hiện trong các vấn đề sau đây:

– Mỗi một khái niệm mới, đặc biệt là những khái niệm khó, đều được dẫn dắt từ nhiều khía cạnh bằng những ví dụ cụ thể, bằng những minh họa hình học và bằng những bài toán trong thực tế để sinh viên có thể thấu hiểu được khái niệm đó.

– Phần lớn chương mục đều có lời mở đầu giới thiệu những vấn đề, những khái niệm được đề cập tới, chỉ rõ mạch kiến thức trong chương mục đó hoặc mối liên quan với các vấn đề, các khái niệm của các chương mục trước và sau để sinh viên tiện theo dõi, nắm được tính hệ thống giáo trình.

– Cuối những chương mục hoặc những vấn đề lớn, đặc biệt là những chương mục có những vấn đề khó, phức tạp, dài, khó theo dõi đều được tóm tắt, hệ thống lại hoặc nêu thành nguyên tắc áp dụng để sinh viên hiểu rõ hơn và vận dụng dễ dàng trong thực hành.

– Trong giáo trình có chỗ không đi quá sâu vào lí thuyết nếu không ảnh hưởng tới tính chính xác, hệ thống của vấn đề. Một mặt những chứng minh quá khó hoặc những vấn đề có thể mở rộng để hiểu sâu hơn, chúng tôi đưa vào phần đọc thêm. Mặt khác, để chứng minh được dễ dàng đôi khi phải giảm tính tổng quát của vấn đề. Ví dụ, trong phân tích phân có những tính chất chỉ đòi hỏi tính khả tích của hàm số, nhưng chứng minh phức tạp, khó khăn. Chúng tôi giới hạn trong lớp các hàm số liên tục để chứng minh được dễ dàng hơn, nhưng cũng đủ để áp dụng vào những tình huống phổ biến trong thực tế.

– Để tăng cường liên hệ với phổ thông, khi xây dựng các khái niệm (ví dụ: số thực ...) đã tận dụng các kiến thức ở phổ thông, ngoài ra cố gắng chọn các ví dụ minh họa liên quan tới các kiến thức ở phổ thông.

